1 Линейная зависимость

Арифметическое n-мерное линейное пространство.

$$\mathcal{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathcal{R}\}$$

Пусть L -- линейное пространство над полем $\mathcal{R}$ вещественных чисел. $\{v_1, \ldots, v_s\} \in L$ -- произвольное семейство векторов в L. Выражение вида:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_s \cdot v_s$$

называется линейной комбинацией векторов v_i с коэффициентами $\alpha_i \in \mathcal{R}$. Линейная комбинация векторов есть снова вектор пространства L.

Линейная комбинация называется тривиальной, если все $\alpha_i = 0$. В противном случае (т.е. если хотя бы один $\alpha_i \neq 0$) линейная комбинация называется нетривиальной. Тривиальная комбинация всегда равна нулю.

Система векторов называется линейно зависимой, если существует нетривиальная комбинация векторов системы равная нулю.

Система векторов называется линейно независимой, если **только** тривиальная комбинация векторов системы равна нулю.

2 Примеры

1. Коллинеарные векторы составляют линейно зависимую систему.
2. Компланарные векторы составляют линейно зависимую систему.
3. Система: $e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1)$ линейно независима.
4. Система: $e_1 = (1, 2, 3); e_2 = (4, 5, 6); e_3 = (7, 8, 9)$ линейно зависима.

3 Способ определения максимальной линейно независимой подсистемы

Для того, чтобы выделить из системы векторов максимальную линейно независимую подсистему нужно :

1. выписать координаты векторов в столбцы матрицы
2. привести полученную матрицу к ступенчатому виду, выполняя преобразования лишь со строками
3. выделить базисные столбцы

Векторы исходной системы, соответствующие базисным столбцам и составляют максимальную линейно независимую подсистему исходной системы (почему?)

4 Способ нахождения коэффициентов выражения данного вектора через систему векторов

Говорят, что данный вектор линейно выражается через систему векторов, если он равен линейной комбинации векторов системы. Коэффициенты этой линейной комбинации назовем коэффициентами выражения данного вектора через систему векторов.

Например:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор $\binom{1}{4}$ выражается через систему векторов $\{\binom{1}{0},\ \binom{1}{-2}\}$ с коэффициентами 3 и -2 или с вектором коэффициентов $(3,\ -2)$.

Для того, чтобы найти коэффициенты выражения данного вектора через систему векторов нужно:

1. выписать координаты векторов системы в столбцы матрицы
2. приписать к ним справа столбец координат данного вектора
3. полученную матрицу считать расширенной матрицей системы линейных уравнений
4. найти какое-нибудь частное решение полученной системы

Найденное частное решение и есть вектор коэффициентов выражения данного вектора через систему векторов (почему?).

Если система не имеет решения, то данный вектор не выражается через систему векторов (почему?).